INGENIEURS DE MARSEILLE J. 2418 1/5 0 1

CONCOURS 1981

OPTION M

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

DURÉE : 4 heures

PRÉAMBULE

E est un espace affine euclidien de dimension 3 dirigé par l'espace vectoriel euclidien $\vec{E}$, $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de E, donc $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale de $\vec{E}$, I un intervalle ouvert du corps des nombres réels, f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de I dans $\vec{E}$, la courbe C est l'ensemble décrit par le point M défini par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f(t)}$ lorsque t décrit I ; on pourra noter $\overrightarrow{f'(t)} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, $\overrightarrow{f''(t)} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$ respectivement les vecteurs dérivés d'ordres 1 et 2 de f au point t et on supposera que $(\forall\, t \in I)\, \overrightarrow{f'(t)} \wedge \overrightarrow{f''(t)} \neq \vec{0}$.

Ω désigne l'origine des abscisses curvilignes sur C supposée orientée, s l'abscisse curviligne de M, $\vec{T}$ le vecteur tel que $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{ds}{dt}\vec{T}$, $\dfrac{ds}{dt}$ désignant la dérivée de l'application $t \longmapsto s$ au point t; il est rappelé qu'il existe alors une application $s \longmapsto \vec{T}$ dérivable sur un intervalle ouvert J et que pour tout point M de C il existe un réel strictement positif R (rayon de courbure de C en M) tel que $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{1}{R}\vec{N}$, $\vec{N}$ étant un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{T}$; on posera $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$ de sorte que $(M ; \vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ soit le repère de Frenet de C en M.

Σ est une surface contenant C et admettant un plan tangent en chacun de ses points, $0 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ une mesure de l'angle du plan osculateur en M à C avec le plan tangent en M à Σ.

Tournez la page S. V. P.

Question préliminaire

Établir l'égalité $R = \dfrac{\| \overrightarrow{f'(t)} \|^3}{\| \overrightarrow{f'(t)} \wedge \overrightarrow{f''(t)} \|}$

I

Dans cette partie, C est une courbe plane tracée dans le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$; Σ est le cylindre engendré par les droites rencontrant C et dirigées par $\vec{k}$; g_1 est une application de classe $\mathcal{C}^2$ de J dans le corps des réels, M_1 le point de Σ défini par $\overrightarrow{MM_1} = g_1(s)\,\vec{k}$, C_1 la courbe décrite par M_1 lorsque s parcourt J, R_1 est le rayon de courbure de C_1 en M_1. L'indice 1 pourra être remplacée par 2 avec les mêmes hypothèses; θ_1 est rattaché à C_1 comme 0 à C (voir le préambule).

1° Calculer $\dfrac{\cos \theta_1}{R_1}$ en fonction de $g'_1(s)$ et $g''_1(s)$.

2° Calculer R_1 en fonction de $g'_1(s)$, $g''_1(s)$ et R. Énoncer le théorème obtenu lorsque C_1 est une hélice.

3° Soit P un plan de E ; $(O_1 ; \vec{i_1}, \vec{j_1})$ un repère orthonormal de P. A tout point M_1 de Σ projeté orthogonalement en M sur C on associe le point m_1 de P défini par $\overrightarrow{O_1 m_1} = s\vec{i_1} + z_1\vec{j_1}$, s étant l'abscisse curviligne de M et z_1 la cote de M_1 $(\overrightarrow{MM_1} = z_1\vec{k})$. On définit ainsi une application $\mathcal{C}$ de Σ dans P; soit γ_1 l'image de C_1 par $\mathcal{C}$.

a. Relation entre la longueur d'un arc $\overset{\frown}{A_1B_1}$ de C_1 et la longueur de son image $\overset{\frown}{a_1b_1}$?

b. Relation entre l'angle des tangentes en M_1 à deux courbes C_1 et C_2 tracées sur Σ, se coupant en M_1, et l'angle des tangentes en m_1 à leurs images γ_1 et γ_2 ?

c. Exprimer la courbure de γ_1 en m_1 en fonction de θ_1 et de la courbure de C_1 en M_1.

d. Comment doit-on choisir C_1 pour que, A_1 et B_1 étant fixés, la longueur de $\overset{\frown}{A_1B_1}$ soit minimale ?

II

Dans cette partie, C est une courbe tracée sur la sphère S de centre O et de rayon 1, Σ est le cône engendré par les droites contenant O et rencontrant C, h une application de classe $\mathcal{C}^2$ de J dans le corps des réels, M_1 le point de Σ défini par $\overrightarrow{OM_1} = h(s)\,\overrightarrow{OM}$, C_1 la courbe décrite par M_1 lorsque s décrit J ; R_1 et θ_1 sont définis comme au I.

1° Calculer $\dfrac{\cos \theta_1}{R_1}$ en fonction de $h(s)$, $h'(s)$, $h''(s)$.

2° Calculer R_1 en fonction de $h(s)$, $h'(s)$, $h''(s)$ et R. On vérifiera que R_1 ne dépend que de R, $\| \overrightarrow{OM_1} \|$, $\left\| \dfrac{d\overrightarrow{OM_1}}{ds} \right\|$ et $h^2(s) + 2h'^2(s) - h(s)\,h''(s)$.

3° P est le plan défini au (I, 3°). A tout point M_1 de Σ on associe le point M (supposé unique) commun à la génératrice (OM_1) et à C; on pose $\overrightarrow{OM_1} = \rho\overrightarrow{OM}$ et enfin on associe à M_1 le point m_1 de P défini par $\overrightarrow{O_1 m_1} = \rho\,(\cos s.\vec{i_1} + \sin s.\vec{j_1})$. On pourra noter $\overrightarrow{u(s)} = \cos s.\vec{i_1} + \sin s.\vec{j_1}$; s désigne toujours l'abscisse curviligne de M sur C. On définit ainsi une application $\mathcal{C}_1$ de Σ dans P.

Traiter les mêmes questions a, b, c, d qu'au (I , 3°) en remplaçant $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}_1$.

III

Dans cette partie, t désigne le temps, $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$ respectivement les vecteurs vitesse et accélération à l'instant t du point M_1 mobile par rapport à $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; on pose $\| \overrightarrow{OM_1} \| = r$. On suppose le mouvement tel qu'à tout instant $\vec{\Gamma}$ et $\overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{V}$ soient colinéaires et que leur rapport ne dépende que de r; on posera donc : $\vec{\Gamma} = \varphi(r)\,\overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{V}$. On suppose les valeurs initiales $(t = 0)$ $\overrightarrow{OM_0}$ de $\overrightarrow{OM_1}$ et $\vec{V_0}$ de $\vec{V}$ telles que $\| \vec{V_0} \| = v_0 \neq 0$, $\| \overrightarrow{OM_0} \| = a \neq 0$ et $\overrightarrow{OM_0} . \vec{V_0} = 0$.

Σ est le cône engendré par les droites (OM_1), C_1 est la trajectoire de M_1.

1° Quelle est l'image de C_1 par une application du type $\mathcal{C}_1$ définie au (II, 3°) ?

2° Montrer que le mouvement de M_1 est uniforme; exprimer $\overrightarrow{OM_1} . \vec{V}$, puis r en fonction de a , v_0 et t.

3° Soit $\alpha \in [0, \pi]$ une mesure de l'angle de $\vec{V}$ avec $\overrightarrow{OM_1}$. Exprimer $r \cos \alpha$ et $r \sin \alpha$ en fonction de a, v_0 et t.

4° Exprimer $\| \vec{\Gamma} \|$, la courbure et la torsion de C_1 en M_1, en fonction de a, v_0 et r.

IV

Dans cette partie, l'application f définie dans le préambule est de classe $\mathcal{C}^3$, C est une courbe gauche, Σ est la surface engendrée par les tangentes à C (exception faite des points de C), ψ_1 une application de classe $\mathcal{C}^2$ de J dans le corps des réels, M_1 le point de Σ défini par $\overrightarrow{MM_1} = \psi_1(s)\,\vec{T}$, C_1 la courbe décrite par M_1 lorsque s décrit J. On suppose donc que $(\forall s \in J)\ \psi_1(s) \neq 0$. R_1, θ_1 et P sont définis comme au I.

1° Calculer $\dfrac{\cos \theta_1}{R_1}$ en fonction de $\psi_1(s)$, $\psi'_1(s)$, $\psi''_1(s)$, R et $\dfrac{dR}{ds}$

2° Soit λ une application de classe $\mathcal{C}^2$ de J dans le plan vectoriel $\vec{P}$ engendré par la base orthonormale $(\vec{i_1}, \vec{j_1})$, γ la courbe décrite par m tel que $\overrightarrow{O_1m} = \overrightarrow{\lambda(s)}$ lorsque s décrit J. A tout point M_1 de Σ on associe le point M (supposé unique) de C tel que la tangente à C en M passe par M_1; on pose $\overrightarrow{MM_1} = \rho\vec{T}$ puis on définit m_1 par $\overrightarrow{mm_1} = \rho\vec{t}$, $\vec{t}$ étant le vecteur unitaire de la tangente en m à γ orientée dans le sens des s croissants. On définit ainsi une application $\mathcal{C}_\lambda$ de Σ dans P ($m_1 = \mathcal{C}_\lambda(M_1)$).

a. Démontrer qu'on peut déterminer λ de sorte que $\mathcal{C}_\lambda$ conserve la longueur des arcs, autrement dit de sorte que : pour tout couple (A_1, B_1) de points de toute courbe C_1, a_1, b_1, γ_1 étant respectivement les images de A_1, B_1, C_1 par $\mathcal{C}_\lambda$, les arcs $\widehat{A_1B_1}$ et $\widehat{a_1b_1}$ aient même longueur. On supposera désormais cette condition vérifiée.

b. Montrer qu'alors $\mathcal{C}_\lambda$ conserve les angles.

c. Trouver, en fonction de θ_1 et R_1 le rayon de courbure de γ_1 en m_1.

d. Comment choisir la courbe C_1, tracée sur Σ, joignant deux points A_1 et B_1 fixés de Σ pour que la longueur de l'arc $\widehat{A_1B_1}$ soit minimale ?

Tournez la page S. V. P.

1/520/1

3° I est le segment $[0, 2\pi]$, C la courbe définie par :

$$\overrightarrow{f(t)} = a(\cos t \,.\, \vec{i} + \sin t \,.\, \vec{j} + \sqrt{3}\, t \,.\, \vec{k}) \qquad (a > 0)$$

a. Montrer que l'image γ de C par une application $\mathcal{C}_\lambda$ répondant aux conditions exprimées dans (IV, 2°, *a.*) est un cercle dont on calculera le rayon. $\mathcal{C}_\lambda$ sera déterminée de façon que γ soit centré à l'origine O_1 du repère et que $\omega = \mathcal{C}_\lambda(\Omega)$ soit le point d'abscisse positive et d'ordonnée nulle de γ.

b. Dans cette seule question $\psi_1(s) = -s$. Reconnaître et tracer C_1 ainsi que son image γ_1 par $\mathcal{C}_\lambda$.

c. Déterminer les applications ψ_1 telles que tout arc $\widehat{A_1B_1}$ de C_1 soit de longueur minimale sur Σ.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail